

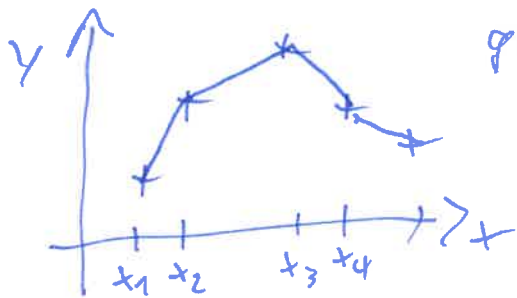
Interpolation mit Splines

↳ Alternative zum Fitten mit hochgradigen Polynomen bzw. zur Regression mit "einfachen" Funktionen

Spline = abschnittsweise definierte Funktion mit Anschlußbedingungen

① Lineare Splines

↳ Abschnitte der Splines sind Geraden



geg: Datenpunkte
 (x_i, y_i)

ges: Parameter a_1^i, a_0^i
der Geradenstücke i

N Datenpunkte

$\Rightarrow N-1$ Abstände zwischen Datenpunkten

$\Rightarrow N-1$ Geradenstücke: $i \in [1, N-1]$

$$\text{Spline: } S(x) = \sum_i S_i(x)$$

mit $S_i(x) = 0$ falls $x \notin [x_i, x_{i+1}]$

Anschlußbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} S_i(x_i) = y_i \\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1^i x_i + a_0^i = y_i \\ a_1^i x_{i+1} + a_0^i = y_{i+1} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{(i)} \\ a_0^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$$

② Quadratische Splines

Ansatz pro Stück:

$$S_i(x) = a_2^{(i)} \cdot x^2 + a_1^{(i)} \cdot x + a_0^{(i)}$$

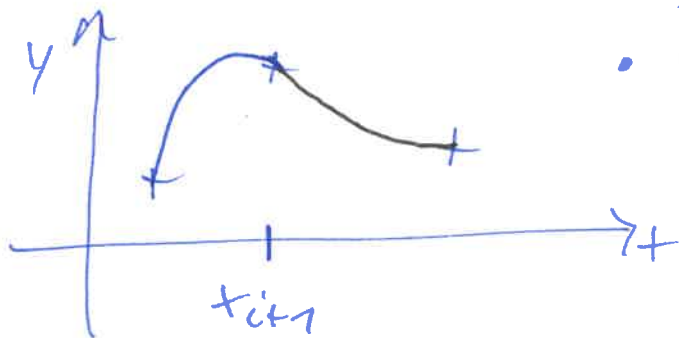
Anschlußbedingungen:

$$S_i(x_i) = y_i$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

Anforderung an glatten Übergang:

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$$



- Parabelbögen
- glatter Übergang zwischen Kurven durch gleiche Ableitung

- $(N-1)$ Parabelbögen
- $3(N-1)$ Parameter
- $3(N-1)$ Bestimmungsgleichungen:
 - $N-1$: Bestimmung Aufgangspunkt
 - $N-1$: " " Endpunkt
 - $N-2$: Berührungspunkte der Parabelbögen

Weiteres Kriterium (2. Ableitung = 0 an x_1)

$$2 \cdot a_2^{(1)} = 0 \Rightarrow a_2^{(1)} = 0$$

Unterschied zu linearen Splines:

↳ Kopplung zwischen den Abschnitten:

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

$$2a_2^{(i)} \cdot x_{i+1} + a_1^{(i)} = 2a_2^{(i+1)} \cdot x_{i+1} + a_1^{(i+1)}$$

↳ Nur gemeinsame Lösung für alle Koeffizienten möglich:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2x_2 & 1 & 0 & -2x_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_0^{(1)} \\ a_2^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ a_0^{(2)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$