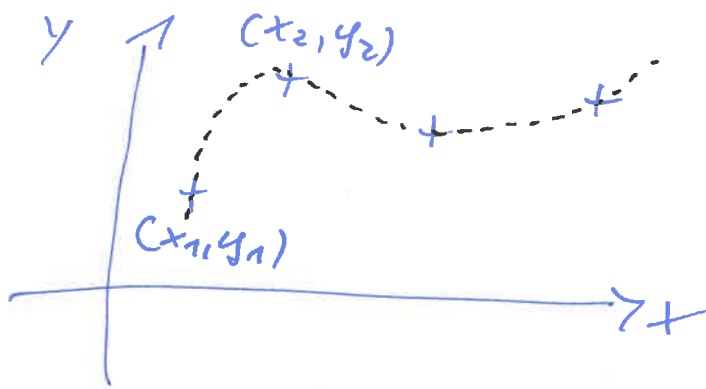


Interpolation und Regression

Fitten von Kurven an Datenpunkte



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

1) Interpolation:

"Was liegt zwischen den Daten?"

↳ Funktion ist nur an Datenpunkten bekannt

↳ Annahmen an die Funktion beschreiben die Übergänge

- von Basisfunktionen $g_i(x)$
z.B. Polynome $g_i(x) = x^i$

- Interpolationsfunktion ist eine Linearkombination der Basisfunktionen

$$f(x) = \sum_{i=1}^M c_i g_i(x)$$

↳ zu bestimmen sind die Koeffizienten c_i

Berechnung der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{I } g_1 &= f(x_1) = c_1 g_1(x_1) + c_2 g_2(x_1) + \dots + c_M g_M(x_1) \\ \text{II } g_2 &= f(x_2) = c_1 g_1(x_2) + c_2 g_2(x_2) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & & g_M(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & & g_M(x_2) \\ g_1(x_3) & g_2(x_3) & \dots & g_M(x_3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_1(x_M) & g_2(x_M) & & g_M(x_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}$$

Bsp: Fitte Polynom vom Grad $M-1$
 (M : Anzahl der Datenpunkte)
 $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $g_1=1 \quad g_2=x \quad g_3=x^2 \quad g_4=x^3$

Vandermonde-Matrix

2) Regression

↳ approximatives Aufritzen einer Kurve (möglichst einfache Kurve)

Ziel: Minimierung des Fehlers

- es gibt unterschiedliche Möglichkeiten den Fehler zu messen
→ unterschiedliche Fehlerfunktionale

Def: Funktional ist eine Abbildung von Funktionen in die reellen Zahlen

$$\begin{array}{ccc} F[f(\dots)] = \mathbb{R} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \text{Funktional} \quad \text{Funktion} \end{array}$$

- Freiheit bei der Wahl der Fitting - Funktion

↳ Wahl einer Funktionenklasse
z.B. Lineare Funktionen

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

a_1 : Steigung, a_0 : Abschnitt

↳ Optimierung von 2 Parametern

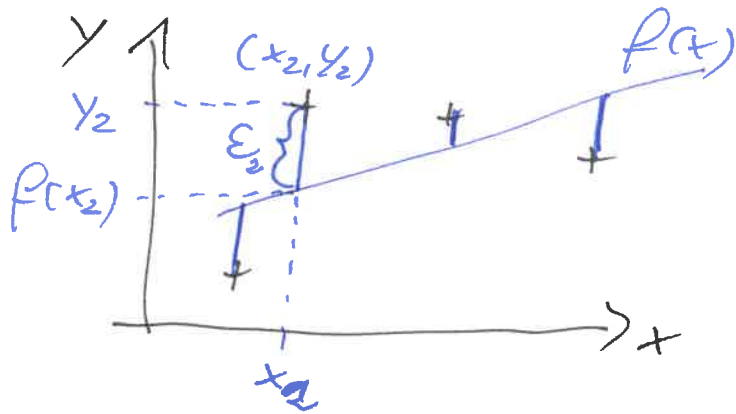
hier: a_1, a_0

zur Minimierung des Fehlers

Lineare Regression

↳ Funktionenklasse: $f(x; a_1, a_0) = a_1 x + a_0$

↳ Fehlerfunktional:



- Gesamtfehler als Summe über alle Einzelfehler

$$\epsilon_2 = y_2 - f(x_2)$$

Fehlerfunktional der quadratischen
Abweichung

$$E = \sum_{i=1}^N [y_i - f(x_i; a_1, a_0)]^2$$

- pos./neg. Fehler sollen sich nicht aufheben
- Betragsfunktion unpraktisch, daher Quadrat

! Die (x_i, y_i) sind fest vorgegebene Daten
noch zu bestimmen sind a_1, a_0
d.h. a_1, a_0 sind bei der Optimierung
die einstellbaren Variablen

Minimieren des Fehlerfunktionals

$$E(a_1, a_0) = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_1 x_i + a_0)]^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^N 2 [y_i - (a_1 x_i + a_0)] \cdot (-x_i) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^N 2 [y_i - (a_1 x_i + a_0)] \cdot (-1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & \sum_{i=1}^N 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{pmatrix}$$

Regression für andere Funktionen- Klassen

↳ generalisierte Vandermonde-Matrix

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j g_j(x) \quad g_j(x) \text{ beliebige Basisfunktionen}$$

$$A = \begin{pmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & \dots & g_N(x_2) \\ \vdots & & \vdots \\ g_1(x_M) & \dots & g_N(x_M) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} N: \text{Basisfunktionen} \\ M: \text{Datenpunkte} \end{array}$$

$$A \cdot \vec{\alpha} = \vec{y} \quad (A \text{ hier nicht quadratisch})$$

Normalenverfahren (Gauß)

↳ multipliziere von links mit A^T

$$\underbrace{A^T A}_{\tilde{A}} \vec{\alpha} = \underbrace{A^T \vec{y}}_{\tilde{y}}$$

$$\tilde{A} \vec{\alpha} = \tilde{y} \rightarrow \text{Löse Gleichungssystem}$$

Vergleich mit linearer Regression

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{d.h.} \quad g_1(x) = x \\ g_2(x) = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & \vdots \\ 1 & \vdots \\ 1 & x_M \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_M \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_M \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M 1 & \sum_{i=1}^M x_i \\ \sum_{i=1}^M x_i & \sum_{i=1}^M x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M y_i \\ \sum_{i=1}^M x_i \cdot y_i \end{pmatrix}$$